Индивидуальные задания по дисциплине «Дискретная математика» для ОЗО

2018

Требования к выполнению:

1. Задания выполняются на листах А4 четким, разборчивым почерком с подробными комментариями.
2. Индивидуальные задания ОБЯЗАТЕЛЬНО сдать в начале сессии.
3. Определения всех понятий должны быть выписаны из учебников и приведены по ходу решения ВСЕХ задач.
4. В Тишине приведены примеры решения почти всех задач

Индивидуальное задание № 1 «Элементы теории множеств».

Задание 1.1.

Доказать, что множество:

№	Условие
10	полученное объединением счетного числа конечных множеств – не более чем счетно

Решение:

Соответствием между множествами X и Y будем называть тройку объектов: Г=(X,Y,G), где X – *область определения* соответствия, Y – *область прибытия* соответствия, G – *график* соответствия, причем $G \subseteq X \times Y$.

Областью определения соответствия будем называть $пр_1G$.

Областью значений соответствия будем называть $пр_2G$.

Соответствие называется *всюду определенным*, если $пр_1G = X$.

Соответствие называется *сюръективным*, если $пр_2G = Y$.

Соответствие называется *функциональным*, или *функцией*, если его график не содержит пар с одинаковыми первыми и различными вторыми координатами.

Соответствие называется *инъективным*, если его график не содержит пар с одинаковыми вторыми и различными первыми координатами.

Соответствие называется *биекцией*, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.

Множества называются *равномощными*, если между ними можно установить биекцию.

Множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел.

Мощность множества X не превосходит мощность множества Y, если множество X равномощно некоторому подмножеству множества Y.

Пусть

$$A_k = \{a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{kn_k}\}, k = 1,2,3,...$$

- счетное число конечных множеств. Рассмотрим множество

$$B = \{b_i\}, i = 1,2,3,...$$

где

$$b_i = a_{km}, \text{ где } i = \sum_{j=1}^{k-1} n_k + m, \text{, если } \sum_{j=1}^{k-1} n_k + m < i \le \sum_{j=1}^{k} n_k \text{ .}$$

Каждое из множеств A_k является подмножеством множества B, следовательно, объединение множеств A_k также является подмножеством множества B, и поэтому мощность объединения множеств A_k не превосходит мощности множества B. Поскольку множество B – не более чем счетно (множества A_k могут содержать одинаковые элементы), то и объединение множеств A_k не более чем счетно, ***что и требовалось доказать***.

Индивидуальное задание № 2. «Элементы комбинаторики».

Задание 2.1.

Найти наибольший член разложения бинома $(a+b)^n$.

№	a	b	n
10	4	$2\sqrt{3}$	11

Решение:

Формула *бинома Ньютона*: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Пусть T_k – наибольший член разложения бинома $(4+2\sqrt{3})^{11}$:

$$T_k = C_{11}^k \cdot 4^k \cdot (2\sqrt{3})^{11-k}$$

Тогда $T_k > T_{k-1}$, $T_k > T_{k+1}$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} C_{11}^k \cdot 4^k \cdot (2\sqrt{3})^{11-k} > C_{11}^{k-1} \cdot 4^{k-1} \cdot (2\sqrt{3})^{12-k} \\ C_{11}^k \cdot 4^k \cdot (2\sqrt{3})^{11-k} > C_{11}^{k+1} \cdot 4^{k+1} \cdot (2\sqrt{3})^{10-k} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{11!}{k!(11-k)!} \cdot 4^k \cdot (2\sqrt{3})^{11-k} > \dfrac{11!}{(k-1)!(12-k)!} \cdot 4^{k-1} \cdot (2\sqrt{3})^{12-k} \\ \dfrac{11!}{k!(11-k)!} \cdot 4^k \cdot (2\sqrt{3})^{11-k} > \dfrac{11!}{(k+1)!(10-k)!} \cdot 4^{k+1} \cdot (2\sqrt{3})^{10-k} \end{cases}$$

После сокращений получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{k} > \dfrac{2\sqrt{3}}{12-k} \\ \dfrac{2\sqrt{3}}{11-k} > \dfrac{4}{k+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(12-k) > 2\sqrt{3}k \\ 2\sqrt{3}(k+1) > 4(11-k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2\sqrt{3}+4)k < 48 \\ (2\sqrt{3}+4)k > 44-2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k < \dfrac{48}{2\sqrt{3}+4} = 6.430... \\ k > \dfrac{44-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+4} = 5.894... \end{cases} \Rightarrow k = 6$$

Следовательно, наибольший член разложения бинома имеет номер k=6 и

$$T_6 = C_{11}^6 \cdot 4^6 \cdot (2\sqrt{3})^5 = \frac{11!}{6! \cdot 5!} \cdot 4^6 \cdot (2\sqrt{3})^5 .$$

Ответ: $T_6 = \frac{11!}{6! \cdot 5!} \cdot 4^6 \cdot (2\sqrt{3})^5$.

Задание 2.2.

Найти коэффициент при x^k в разложении данного выражения P по полиномиальной формуле, полученный после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

№	k	P
10	22	$(3-x^2+x^5)^{12}$

Решение:

Полиномиальная формула:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=\sum^{n}_{\substack{k_1\in N_0,\ldots,k_m\in N_0\\ k_1+k_2+\ldots+k_m=n}}\frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$$

Общий член разложения по полиномиальной формуле имеет вид:

$$3^m\cdot(-x^2)^n\cdot(x^5)^k\cdot\frac{n!}{m!\,n!\,k!},m+n+k=22.$$

Для отыскания всех случаев, в которых возникает x^{22}, решаем в целых неотрицательных числах уравнение $2n+5k=22$.

Выразим k: $k=\frac{22-2n}{5}$.Видно, что k принимает целые значения, если n=1, 6 или 11. Выпишем эти случаи:

$n=1$, $k=4$ $n=6$, $k=2$ $n=11$, $k=0$.

Для каждой найденной пары значений n и k определяем m из равенства $m+n+k=12$, получаем три набора (m, n, k): (7, 1, 4), (4, 6, 2) и (1, 11, 0).

Получаем слагаемые разложения, содержащие x^{22}:

$$3^7\cdot(-x^2)^1\cdot(x^5)^4\cdot\frac{12!}{7!\cdot1!\cdot4!}=-8660520x^{22}$$

$$3^4\cdot(-x^2)^6\cdot(x^5)^2\cdot\frac{12!}{4!\cdot6!\cdot2!}=1122660x^{22}$$

$$3^1\cdot(-x^2)^{11}\cdot(x^5)^0\cdot\frac{12!}{1!\cdot11!\cdot0!}=-36x^{22}.$$

В итоге коэффициент при x^{22} равен

$$3^7\cdot(-1)^1\cdot\frac{12!}{7!\cdot1!\cdot4!}+3^4\cdot(-1)^6\cdot\frac{12!}{4!\cdot6!\cdot2!}+3^1\cdot(-1)^{11}\cdot\frac{12!}{1!\cdot11!\cdot0!}=$$
$$=-8660520+1122660-36$$
$$=-7537896$$

Ответ: $3^7 \cdot (-1)^1 \cdot \frac{12!}{7! \cdot 1! \cdot 4!} + 3^4 \cdot (-1)^6 \cdot \frac{12!}{4! \cdot 6! \cdot 2!} + 3^1 \cdot (-1)^{11} \cdot \frac{12!}{1! \cdot 11! \cdot 0!} = -7537896$.

Задание 2.3.

Найти общее решение рекуррентного соотношения 5-го порядка

$f(n+5) = a\cdot f(n+4) + b\cdot f(n+3) + c\cdot f(n+2) + d\cdot f(n+1) + e\cdot f(n)$

№	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
10	5	-4	-16	32	-16

Решение:

Линейным рекуррентным соотношением k-го порядка с помтоянными коэффициентами называется соотношение вида

$$f(n+k) = a_1\cdot f(n+k-1) + a_2\cdot f(n+k-2) + ... + a_k\cdot f(n).$$

Общим решением такого соотношения называется такое его решение, которое содержит k произвольных постоянных, путем подбора которых можно удовлетворить любым начальным условиям.

Характеристическим уравнением данного рекуррентного соотношения называется уравнение

$$x^k = a_1\cdot x^{k-1} + a_2\cdot x^{k-2} + ... + a_k$$

Общее решение рекуррентного соотношения имеет вид:

$$f(n) = A_1 + A_2 + ... + A_p,$$

где

$A_i = C_i x^n$, если x – простой действительный корень характеристического уравнения, C_i – произвольные постоянные,

$A_i = x^n(C_{i,1} + nC_{i,2} + n^2C_{i,3} + ... + n^{m-1}C_{i,m})$, если x – действительный корень кратности m характеристического уравнения, $C_{i,k}$ – произвольные постоянные,

Запишем характеристическое уравнение данного соотношения:

$$x^5 = 5x^4 - 4x^3 - 16x^2 + 32x - 16.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что x_1= 1- корень характеристического уравнения.

Понижаем степень уравнения, поделив характеристический многочлен на x-1 по схеме Горнера:

	1	-5	4	16	-32	16
1	1	-4	0	16	-16	

В результате деления получили уравнение четвертой степени

$$x^4 - 4x^3 + 16x - 16.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что x_2= 2- корень этого уравнения. Понижаем степень уравнения, поделив характеристический многочлен на x-2 по схеме Горнера:

	1	-4	16	0	-16
2	1	-2	-4	8	0

В результате деления получили уравнение четвертой степени

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что x_2= 2- корень и этого уравнения. Понижаем степень уравнения, поделив характеристический многочлен на x-2 по схеме Горнера:

	1	-2	-4	8
2	1	0	-4	0

В результате деления получили уравнение четвертой степени

$$x^2 - 4.$$

корнями которого являются x_2= 2 и x_3= -2.

Таким образом, характеристическое уравнение имеет простой корень x_1=1, корень x_2= 2 кратности 3 и x_3= -2.

Следовательно, общее решение данного рекуррентного соотношения имеет вид:

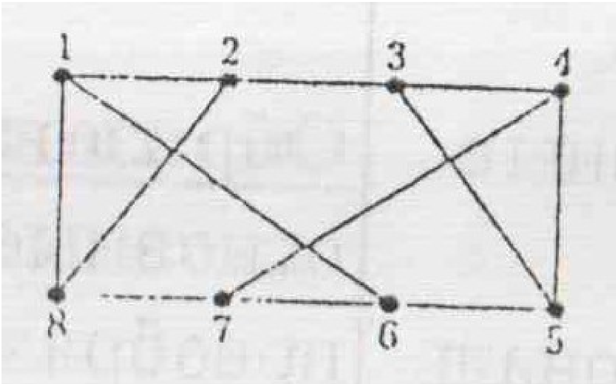
$$f(n) = C_1 \cdot 1^n + (C_2 + C_3 n + C_4 n^2) \cdot 2^n + C_5 \cdot (-2)^n$$

Ответ: $f(n) = C_1 + (C_2 + C_3 n + C_4 n^2) \cdot 2^n + C_5 \cdot (-2)^n$.

Индивидуальное задание № 3 : «Элементы теории графов»

Вариант 10

1. Построить матрицу инцидентности.
2. Построить матрицу смежности.
3. Найти степени вершин
4. Найти цикломатическое число графа.
5. Найти радиус и диаметр.
6. Проверить наличие эйлеровой цепи.
7. Проверить наличие гамильтоновой цепи.
8. Допускает ли плоскую укладку граф?
9. Найти хроматическое число графа.



Решение:

1. Матрица инцидентности графа: строки соответствуют вершинам, столбцы – ребрам, элемент равен 1, если ребро инцидентно вершинам, иначе равен 0.

Строим матрицу инцидентности данного графа:

$$B=\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

2. Матрица смежности графа: строки и столбцы соответствуют вершинам, элемент равен 1, если вершины смежные, иначе равен 0. Строим матрицу смежности.

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&1&0&1\\1&0&1&0&0&0&0&1\\0&1&0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1&0&1\\1&1&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

3. Степень вершины – число ребер, инцидентных вершине. Находим степени вершин графа

Вершина	1	2	3	4	5	6	7	8
Степень	3	3	3	3	3	3	3	3

4. Цикломатическое число графа – минимальное число ребер, которые нужно удалить, чтобы в графе не было циклов. Определяем цикломатическое число графа: граф имеет 12 ребер и 8 вершин – его цикломатическое число равно 12-8+1=5.

5. Расстояние между вершинами – длина минимального пути между этими вершинами. Эксцентриситет вершины – максимальное расстояние от этой вершины до остальных. Радиус графа – минимальный эксцентриситет его вершин, диаметр графа - максимальный эксцентриситет его вершин. Строим матрицу расстояний между вершинами данного графа:

$$D=\begin{pmatrix}0&1&2&3&2&1&2&1\\1&0&1&2&2&2&2&1\\2&1&0&1&1&2&2&2\\3&2&1&0&1&2&1&2\\2&2&1&1&0&1&2&3\\1&2&2&2&1&0&1&2\\2&2&2&1&2&1&0&1\\1&1&2&2&3&2&1&0\end{pmatrix}$$

Определяем эксцентриситеты вершин

Вершина	1	2	3	4	5	6	7	8
Эксцентриситет	3	2	2	3	3	2	2	3

Определяем радиус и диаметр графа:

$$r = \min\{3,2,2,3,3,2,2,3\} = 2$$

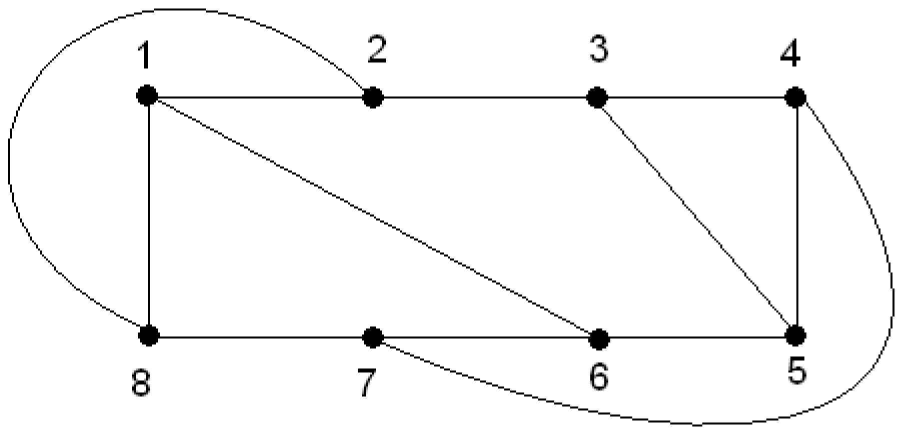
$$d = \max\{3,2,2,3,3,2,2,3\} = 3$$

6. Эйлерова цепь – цепь, проходящая по всем ребрам графа ровно один раз. Для существования такой цепи необходимо, чтобы число вершин нечетной степени было не больше 2. Для данного графа это условие не выполнено – данный граф не имеет эйлеровой цепи.

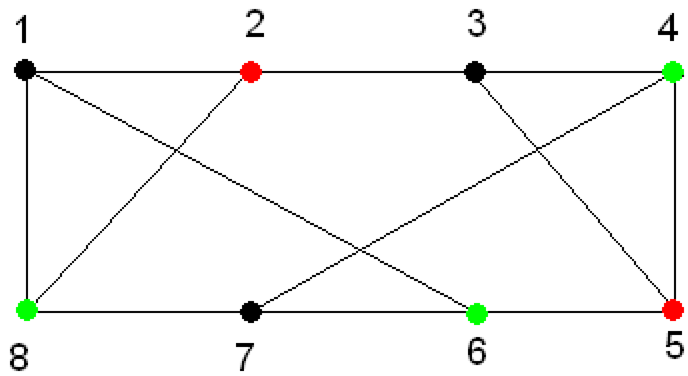
7. Гамильтонова цепь – цепь, проходящая через все вершины графа ровно один раз. Для данного графа такая цепь существует, пример: цепь

1-2-3-4-5-6-7-8.

8. Плоская укладка – нет пересечений ребер в изображении графа на плоскости. Данный граф допускает плоскую укладку:



9. Правильная раскраска графа – раскраска вершин графа так, что смежные вершины окрашены в разные цвета. Хроматическое число графа – минимальное число красок в правильной раскраске. Для данного графа хроматическое число равно 3, правильная раскраска вершин графа тремя красками показана на рисунке:



Меньшим числом красок обойтись нельзя, т.к. граф имеет циклы длины 3, для правильной раскраски которых требуется 3 краски.